Исследование простейших показательно-степенных функций

Гибадуллин А.А., студент НВГУ

Аннотация: в работе исследуются простейшие показательно-степенные функции.

Ключевые слова: показательно-степенная функция, сложно-показательная функция, факториал.

Показательно-степенной функцией называется функция вида $y=[f(x)]^{g(x)}$, где f(x) и g(x) – функции от некоторой переменной x. То есть неизвестная содержится и в основании, и в показателе степени.

Существует общая формула для нахождения производных таких функций $y'= (g' \ln f + f' g / f) f^g$

Она находится следующим образом

$\ln y = \ln f^g$

$\ln y = g \ln f$

$(\ln y)' = (g \ln f)'$

$(1/y) y' = g' \ln f + (\ln f)' g$

$(1/y) y' = g' \ln f + (1/f) f' g$

$y'= (g' \ln f + f' g / f) y$

В работе исследованы следующие функции: x^x и $x^{1/x}$.

Подставляя функции в основании и показателе, получаем значение производных:

$(x^x)'= (\ln x + 1) x^x$

$(x^{1/x})'= ((-1/x^2) \ln x + 1/x^2) x^{1/x} = (1 - \ln x) x^{-2+1/x}$

Для обеих функций невозможно найти неопределенный интеграл, выраженный через элементарные функции.

Интересно поведение функций при отрицательных значениях аргумента, так как в этом случае меняется их знак, значения функций могут уходить в комплексную область.

В положительной области обе функции имеют положительное значение. В единице графики функций пересекаются в точке (1,1).

Функция x^x

- предел при стремлении значения аргумента к нулю справа равен единице,

- возрастает на знакоположительной области,

- предел при стремлении к бесконечности равен бесконечности.

Функция $x^{1/x}$

- предел при стремлении значения аргумента к нулю справа равен нулю,

- возрастает от нуля до e и убывает после,

- значение на знакоположительной области не превышает $e^{1/e}$,

- предел при стремлении к бесконечности равен единице.

Если сравнить функцию x^x и $x!$ при неотрицательных целых значениях аргумента, то обнаружим, что функция x^x возрастает быстрее. Также при x равном степени основания системы счисления, получается значение, которое легко записать в используемой системе счисления.

Например, 10^{10} = 10 000 000 000 в десятичной.

Литература

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. М.: Изд-во МГУ. Ч.1: 2-е изд., перераб., 1985. – С. 212-213